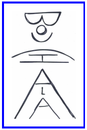
Je Mensa plná hlupáků?

Jiří Bouchala



Katedra aplikované matematiky

Konference projektu **Matematika s radostí**

27. 8. 2014, Rajská bouda, Malenovice

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Definice.

Posloupností (přesněji: posloupností reálných čísel)

Definice.

Posloupností (přesněji: posloupností reálných čísel) rozumíme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$.

Definice.

<u>Posloupností</u> (přesněji: posloupností reálných čísel) rozumíme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$.

Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in \mathbb{R}$
(a_n ... tzv. <u>n-tý člen posloupnosti</u>), budeme zapisovat některým z následujících způsobů:

- $a_1, a_2, a_3, \ldots$;
- (a_n);

Definice.

<u>Posloupností</u> (přesněji: posloupností reálných čísel) rozumíme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$.

Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in \mathbb{R}$ (a_n ... tzv. <u>n-tý člen posloupnosti</u>), budeme zapisovat některým z následujících způsobů:

- $a_1, a_2, a_3, \dots$;
- (a_n);
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice.

Posloupností (přesněji: posloupností reálných čísel) rozumíme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$.

Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo $a_n \in \mathbb{R}$ (a_n ... tzv. n-tý člen posloupnosti), budeme zapisovat některým z následujících způsobů:

- $a_1, a_2, a_3, \dots$;
- (a_n);
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Pozor!

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \neq \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\} \quad \dots \quad \text{obor hodnot posloupnosti.}$$

Příklady posloupností.

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}, \quad \sqrt{2014},$

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}, \quad \sqrt{2014}, \quad \sqrt{2014},$

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ;

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014},\ \ \sqrt{2014},\ \ \sqrt{2014},\ \ \sqrt{2014},\ \ \ldots\ ;\ a_n := \sqrt{2014}$

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_{n+1} = a_n$.

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}, \ \sqrt{2014}, \ \sqrt{2014}, \ \sqrt{2014}, \ \ldots$; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ;

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$

  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \;\; a_{n+1} = a_n$.

- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$

  ... aritmetická posloupnost,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}, \quad \sqrt{2014}, \quad \sqrt{2014}, \quad \sqrt{2014}, \quad \ldots\ ;\ a_n := \sqrt{2014}$

  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_{n+1} = a_n$.

- $1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots\ ;\ a_n := n$

  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \delta \in \mathbb{R}: \quad a_{n+1} = a_n + \delta$.

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... <u>konstantní posloupnost</u>, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... <u>aritmetická posloupnost</u>, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... <u>konstantní posloupnost</u>, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... <u>aritmetická posloupnost</u>, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.
- 1,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... <u>konstantní posloupnost</u>, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... <u>aritmetická posloupnost</u>, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... <u>geometrická posloupnost</u>, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... <u>konstantní posloupnost</u>, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... <u>aritmetická posloupnost</u>, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... <u>geometrická posloupnost</u>, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... <u>konstantní posloupnost</u>, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... <u>aritmetická posloupnost</u>, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... <u>geometrická posloupnost</u>, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}, \ \sqrt{2014}, \ \sqrt{2014}, \ \sqrt{2014}, \ \dots ; \ a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_{n+1} = a_n$.
- $1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ \dots ; \ a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N} : \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N} : \ a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, ...

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, ...
- 1,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$

  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.

- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$

  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.

- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$

  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = q a_n$.

- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, ...

- 1, 2,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$

  ... <u>konstantní posloupnost</u>, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.

- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$

  ... <u>aritmetická posloupnost</u>, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.

- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$

  ... <u>geometrická posloupnost</u>, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.

- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, ...

- 1, 2, 3,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, ...
- 1, 2, 3, 5,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, ...
- 1, 2, 3, 5, 8,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... <u>konstantní posloupnost</u>, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... <u>aritmetická posloupnost</u>, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... <u>geometrická posloupnost</u>, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, ...
- 1, 2, 3, 5, 8, 13,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, ...
- 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, ...
- 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, ...
- 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, ...
- 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 91,

Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$

  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.

- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$

  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.

- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$

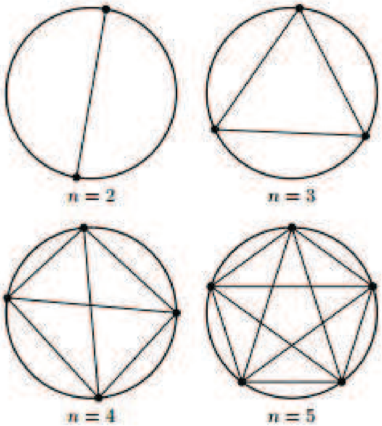
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.

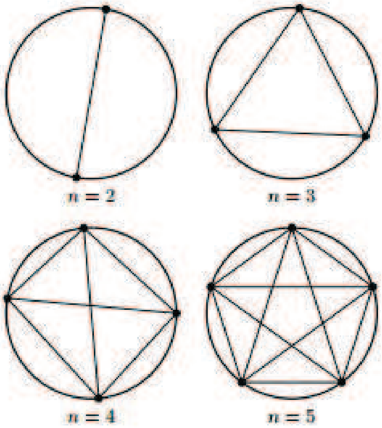
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, ...

- 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 91, 149,

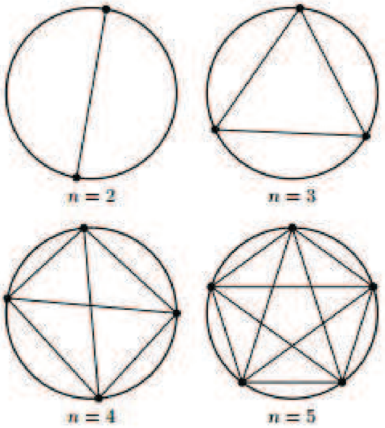
Příklady posloupností.

- $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, $\sqrt{2014}$, ... ; $a_n := \sqrt{2014}$
  ... konstantní posloupnost, tzn. že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n$.
- 1, 2, 3, 4, 5, ... ; $a_n := n$
  ... aritmetická posloupnost, tzn. že $\exists \delta \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = a_n + \delta$.
- 3, 9, 27, 81, 243, ... ; $a_n := 3^n$
  ... geometrická posloupnost, tzn. že $\exists q \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} = q a_n$.
- 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, ...
- 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 91, 149, ... ; $a_n := \mathrm{ceil}\left(e^{\frac{n-1}{2}}\right)$.

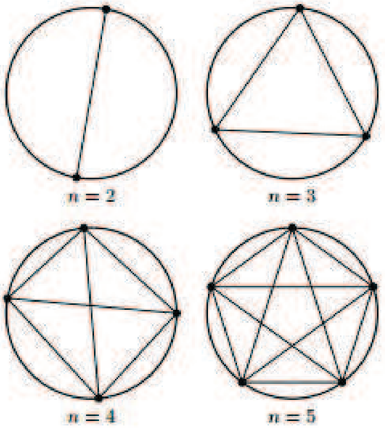

$n = 2$
$n = 3$
$n = 4$
$n = 5$



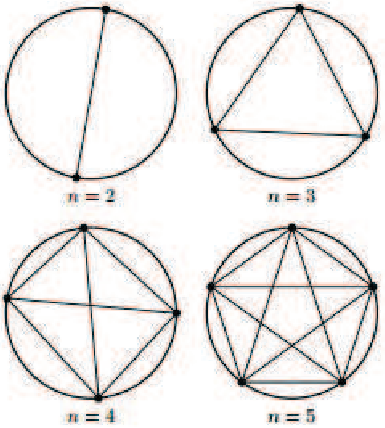
- 1,



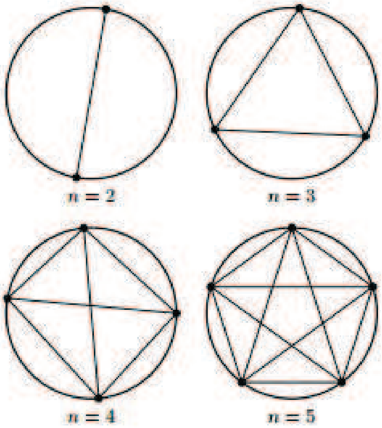
- 1, 2,



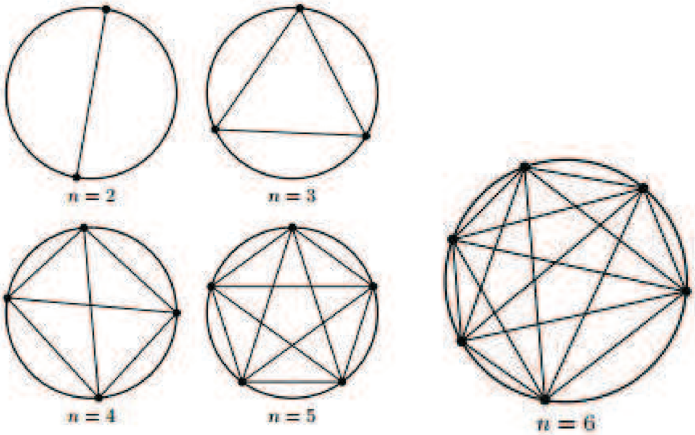
- 1, 2, 4,



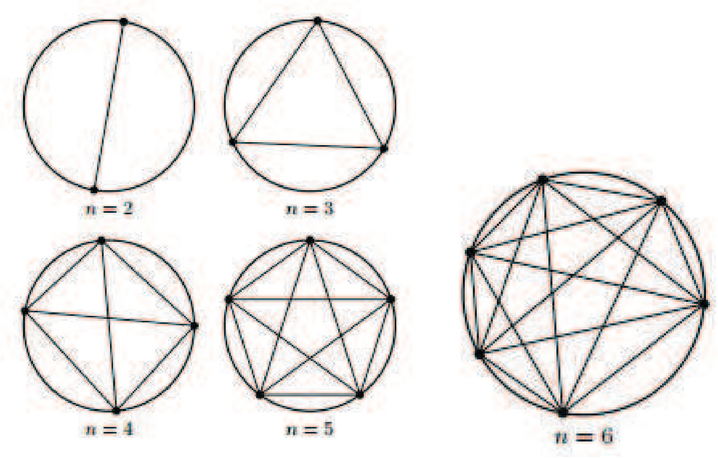
- 1, 2, 4, 8,



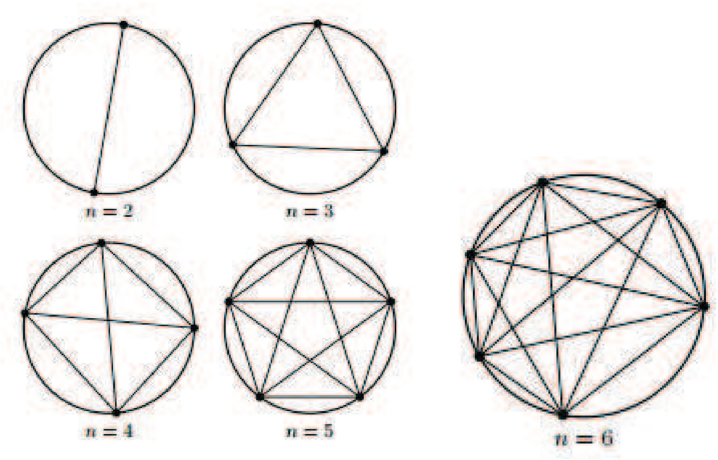
- 1, 2, 4, 8, 16,



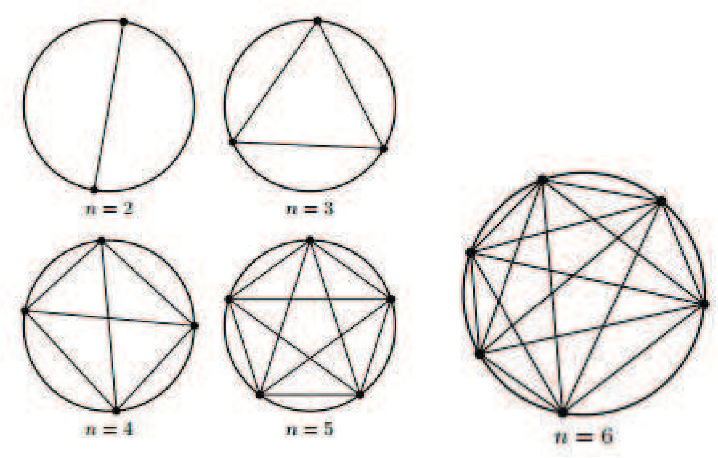
- 1, 2, 4, 8, 16,



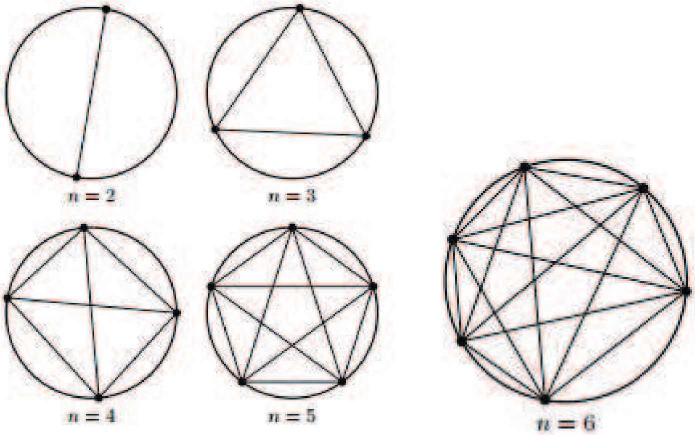
- 1, 2, 4, 8, 16, 31,



- 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57,



- 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99,



- 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, ... ; $a_n := \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$.

$$0, \quad 1, \quad -1, \quad 2, \quad -2, \quad 3, \quad -3, \quad 4, \quad -4, \quad \ldots$$

$$\frac{0}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{2}, \quad -\frac{2}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad -\frac{3}{2}, \quad \frac{4}{2}, \quad -\frac{4}{2}, \quad \ldots$$

$$\frac{0}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad -\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{3}, \quad -\frac{3}{3}, \quad \frac{4}{3}, \quad -\frac{4}{3}, \quad \ldots$$

$$\frac{0}{4}, \quad \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{2}{4}, \quad -\frac{2}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad -\frac{3}{4}, \quad \frac{4}{4}, \quad -\frac{4}{4}, \quad \ldots$$

$$\vdots$$

$$0,\quad 1,\quad -1,\quad 2,\quad -2,\quad 3,\quad -3,\quad 4,\quad -4,\quad \dots$$

$$\frac{0}{2},\quad \frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{2}{2},\quad -\frac{2}{2},\quad \frac{3}{2},\quad -\frac{3}{2},\quad \frac{4}{2},\quad -\frac{4}{2},\quad \dots$$

$$\frac{0}{3},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{1}{3},\quad \frac{2}{3},\quad -\frac{2}{3},\quad \frac{3}{3},\quad -\frac{3}{3},\quad \frac{4}{3},\quad -\frac{4}{3},\quad \dots$$

$$\frac{0}{4},\quad \frac{1}{4},\quad -\frac{1}{4},\quad \frac{2}{4},\quad -\frac{2}{4},\quad \frac{3}{4},\quad -\frac{3}{4},\quad \frac{4}{4},\quad -\frac{4}{4},\quad \dots$$

$$\vdots$$

- Definujme posloupnost (a_n):

$$(a_n) := 0,\ 1,\ \frac{0}{2},\ -1,\ \frac{1}{2},\ \frac{0}{3},\ 2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{0}{4},\ -2,\ \frac{2}{2},\ \dots\ .$$

$$0, \quad 1, \quad -1, \quad 2, \quad -2, \quad 3, \quad -3, \quad 4, \quad -4, \quad \dots$$

$$\frac{0}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{2}, \quad -\frac{2}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad -\frac{3}{2}, \quad \frac{4}{2}, \quad -\frac{4}{2}, \quad \dots$$

$$\frac{0}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad -\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{3}, \quad -\frac{3}{3}, \quad \frac{4}{3}, \quad -\frac{4}{3}, \quad \dots$$

$$\frac{0}{4}, \quad \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{2}{4}, \quad -\frac{2}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad -\frac{3}{4}, \quad \frac{4}{4}, \quad -\frac{4}{4}, \quad \dots$$

$$\vdots$$

- Definujme posloupnost (a_n):

$$(a_n) := 0, \ 1, \ \frac{0}{2}, \ -1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{0}{3}, \ 2, \ -\frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{0}{4}, \ -2, \ \frac{2}{2}, \ \dots .$$

Pak

$$\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q},$$

$$0, \quad 1, \quad -1, \quad 2, \quad -2, \quad 3, \quad -3, \quad 4, \quad -4, \quad \ldots$$

$$\frac{0}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{2}, \quad -\frac{2}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad -\frac{3}{2}, \quad \frac{4}{2}, \quad -\frac{4}{2}, \quad \ldots$$

$$\frac{0}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad -\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{3}, \quad -\frac{3}{3}, \quad \frac{4}{3}, \quad -\frac{4}{3}, \quad \ldots$$

$$\frac{0}{4}, \quad \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{2}{4}, \quad -\frac{2}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad -\frac{3}{4}, \quad \frac{4}{4}, \quad -\frac{4}{4}, \quad \ldots$$

$$\vdots$$

- Definujme posloupnost (a_n):

  $$(a_n) := 0,\ 1,\ \frac{0}{2},\ -1,\ \frac{1}{2},\ \frac{0}{3},\ 2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{0}{4},\ -2,\ \frac{2}{2},\ \ldots\ .$$

  Pak

  $$\{a_n :\ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q},$$

  přičemž pro každé $q \in \mathbb{Q}$ existuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) rovných číslu q (např. $q = 1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \ldots$).

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... ;

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... ;

$$a_1 = a_2 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}:\ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$$

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... ;

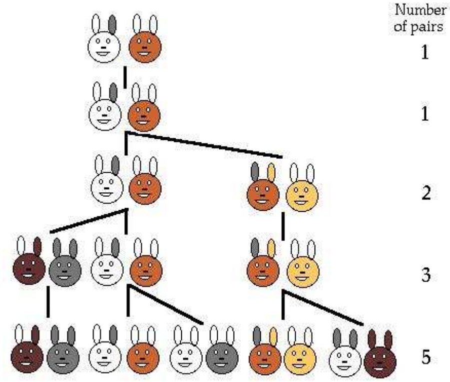
$$a_1 = a_2 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$$

... Fibonacciho posloupnost (definovaná *rekurentně*).

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... ;

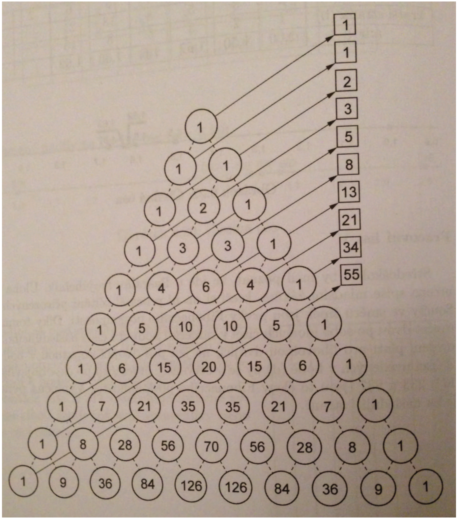
$$a_1 = a_2 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}:\ \ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$$

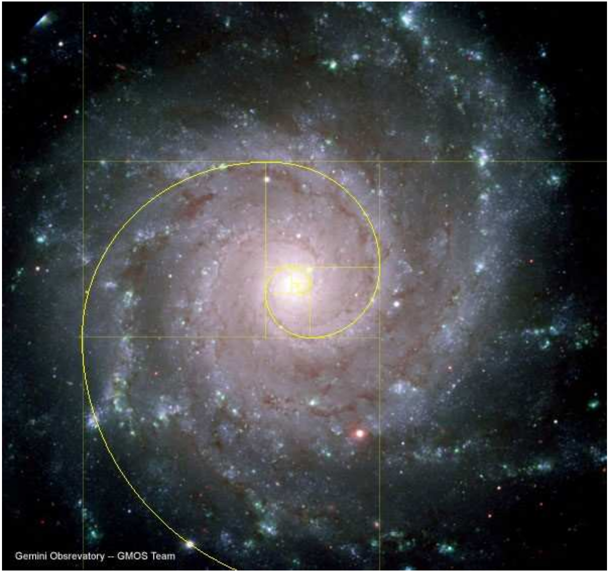
... Fibonacciho posloupnost (definovaná *rekurentně*).

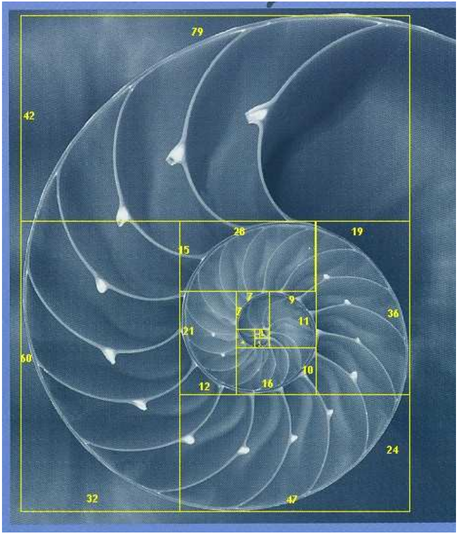


- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... ;

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 … ;




Gemini Obsrevatory -- GMOS Team


79
42
28
19
15
7
9
7
11
36
21
60
10
12
16
24
32
47

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... ;

  $a_1 = a_2 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}:\ \ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n.$

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... ;

  $a_1 = a_2 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}: \ \ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n.$

  Platí

  -
$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \ a_n :=$$

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... ;

  $a_1 = a_2 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n.$

  Platí

  - $$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n := \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n ,$$

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... ;

  $a_1 = a_2 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n.$

  Platí

  - $$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n := \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n ,$$
  - $$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... ;

  $a_1 = a_2 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}:\ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n.$

  Platí

  - $$\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n := \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

  - $$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... ;

  $a_1 = a_2 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}:\ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n.$

  Platí

  -
$$\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n := \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

  -
$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}}$$

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... ;

  $a_1 = a_2 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n.$

  Platí

  - $$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n := \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

  - $$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}$$

- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 \dots$;

  $a_1 = a_2 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n.$

  Platí

  - $$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n := \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

  - $$\boxed{\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}} \doteq 1,6}$$

- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 \ldots$;

  $a_1 = a_2 = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+2} := a_{n+1} + a_n.$

  Platí

  - $$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n := \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n ,$$

  - $$\boxed{\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}} \doteq 1,6}$$

... zlatý řez.

Uvažujme mocniny čísla 2:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ \ldots$$

Uvažujme mocniny čísla 2:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ \ldots$$

a soustřeďme svoji pozornost na jejich první cifry:

Uvažujme mocniny čísla 2:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ \ldots$$

a soustřeďme svoji pozornost na jejich první cifry:

$$\textcolor{red}{2},\ \textcolor{red}{4},\ \textcolor{red}{8},\ \textcolor{red}{1}6,\ \textcolor{red}{3}2,\ \textcolor{red}{6}4,\ \textcolor{red}{1}28,\ \textcolor{red}{2}56,\ \textcolor{red}{5}12,\ \textcolor{red}{1}024,\ \ldots$$

Uvažujme mocniny čísla 2:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

a soustřeďme svoji pozornost na jejich první cifry:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

Otázka:

Existuje mocnina čísla 2, která začíná cifrou 7 ?

Uvažujme mocniny čísla 2:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

a soustřeďme svoji pozornost na jejich první cifry:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

Otázka:

Existuje mocnina čísla 2, která začíná cifrou 7 ?

Odpověď: Ano

Uvažujme mocniny čísla 2:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ \ldots$$

a soustřeďme svoji pozornost na jejich první cifry:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ \ldots$$

Otázka:

Existuje mocnina čísla 2, která začíná cifrou 7 ?

Odpověď: Ano, například

$$2^{46} = 70368744177664.$$

Uvažujme mocniny čísla 2:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ \ldots$$

a soustřeďme svoji pozornost na jejich první cifry:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ \ldots$$

Otázka:

Existuje mocnina čísla 2, která začíná cifrou 7 ?

Odpověď: Ano, například

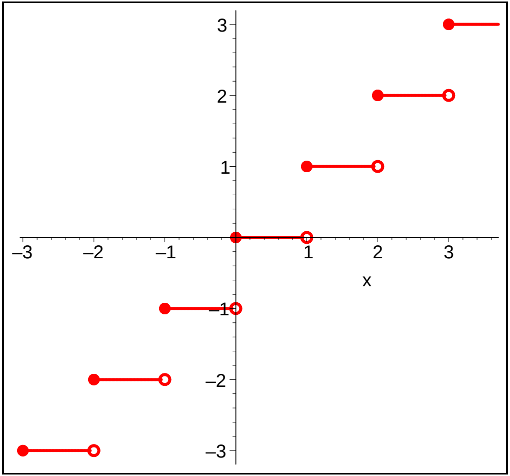
$$2^{46} = 70368744177664.$$

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7 ?

Nejdříve pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujme celou část čísla x jako takové číslo $[x] \in \mathbb{Z}$, pro něž

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$



Věta (W. Sierpinski, H. Weyl, P. Bohl; 1910).

Buď $x \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost (a_n) předpisem

$$a_n := nx - [nx].$$

Věta (W. Sierpinski, H. Weyl, P. Bohl; 1910).

Buď $x \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost (a_n) předpisem

$$a_n := nx - [nx].$$

Pak platí:

- je-li $x \in \mathbb{Z}$, je $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;

Věta (W. Sierpinski, H. Weyl, P. Bohl; 1910).

Buď $x \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost (a_n) předpisem

$$a_n := nx - [nx].$$

Pak platí:

- je-li $x \in \mathbb{Z}$, je $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- je-li $x = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, je $a_{n+q} = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;

Věta (W. Sierpinski, H. Weyl, P. Bohl; 1910).

Buď $x \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost (a_n) předpisem

$$a_n := nx - [nx].$$

Pak platí:

- je-li $x \in \mathbb{Z}$, je $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- je-li $x = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, je $a_{n+q} = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- je-li $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, je posloupnost (a_n) prostá a navíc platí, že pro každé $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$, $\alpha < \beta$, leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) v intervalu (α, β) (tzn. $\overline{\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}} = \langle 0, 1 \rangle$).

Věta (W. Sierpinski, H. Weyl, P. Bohl; 1910).

Buď $x \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost (a_n) předpisem

$$a_n := nx - [nx].$$

Pak platí:

- je-li $x \in \mathbb{Z}$, je $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- je-li $x = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, je $a_{n+q} = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- je-li $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, je posloupnost (a_n) prostá a navíc platí, že pro každé $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle,\ \alpha < \beta$, leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) v intervalu (α, β) (tzn. $\overline{\{a_n :\ n \in \mathbb{N}\}} = \langle 0, 1 \rangle$).

Důkaz

Věta (W. Sierpinski, H. Weyl, P. Bohl; 1910).

Buď $x \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost (a_n) předpisem

$$a_n := nx - [nx].$$

Pak platí:

- je-li $x \in \mathbb{Z}$, je $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- je-li $x = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, je $a_{n+q} = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- je-li $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, je posloupnost (a_n) prostá a navíc platí, že pro každé $\alpha, \beta \in \langle 0, 1\rangle$, $\alpha < \beta$, leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) v intervalu (α, β) (tzn. $\overline{\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}} = \langle 0, 1\rangle$).

Důkaz prvních dvou tvrzení je velmi snadný, neboť

$$a_{n+q} = (n+q)\frac{p}{q} - [(n+q)\frac{p}{q}] = n\frac{p}{q} + p - [n\frac{p}{q}] - p = a_n.$$

Ukažme si, proč platí tvrzení třetí:

Ukažme si, proč platí tvrzení třetí:

- Je-li

$$nx - [nx] = \underline{a_n = a_m} = mx - [mx],$$

Ukažme si, proč platí tvrzení třetí:

- Je-li
$$nx - [nx] = \underline{a_n = a_m} = mx - [mx],$$
je
$$(n-m)x = [nx] - [mx] \in \mathbb{Z},$$
a proto (x je iracionální!) $\underline{n = m}$. Posloupnost (a_n) je prostá.

Ukažme si, proč platí tvrzení třetí:

- Je-li
$$nx - [nx] = \underline{a_n = a_m} = mx - [mx],$$
je
$$(n-m)x = [nx] - [mx] \in \mathbb{Z},$$
a proto (x je iracionální!) $\underline{n = m}$. Posloupnost (a_n) je prostá.

- Buď $n \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\frac{1}{n} < \beta - \alpha,$$

Ukažme si, proč platí tvrzení třetí:

- Je-li
$$nx - [nx] = \underline{a_n = a_m} = mx - [mx],$$
je
$$(n-m)x = [nx] - [mx] \in \mathbb{Z},$$
a proto (x je iracionální!) $\underline{n = m}$. Posloupnost (a_n) je prostá.

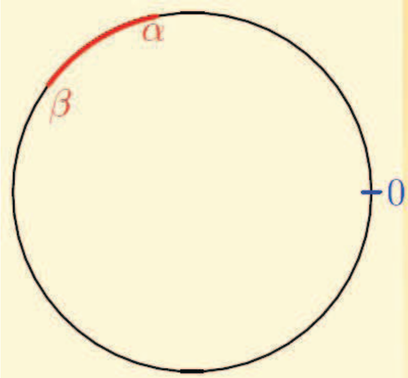
- Buď $n \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\frac{1}{n} < \beta - \alpha,$$
a uvažujme body
$$a_1, a_2, ..., a_{n+1} \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Ukažme si, proč platí tvrzení třetí:

- Je-li
$$nx - [nx] = \underline{a_n = a_m} = mx - [mx],$$
je
$$(n-m)x = [nx] - [mx] \in \mathbb{Z},$$
a proto (x je iracionální!) $\underline{n = m}$. Posloupnost (a_n) je prostá.

- Buď $n \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\frac{1}{n} < \beta - \alpha,$$
a uvažujme body
$$a_1, a_2, ..., a_{n+1} \in \langle 0, 1 \rangle.$$
Pak zřejmě existují $i, s \in \mathbb{N}$ takové, že $i, i+s \in \{1, 2, ..., n+1\}$ a že
$$0 < \varepsilon := |a_i - a_{i+s}| \leq \frac{1}{n} < \beta - \alpha.$$

- Nyní si představme reálnou osu navinutou na kružnici K o `délce` 1, na níž je vyznačen bod 0 (situace je podobná jako při znázorňování goniometrických funkcí, ale poloměr příslušné kružnice není 1, ale $\frac{1}{2\pi}$). Reálná čísla si znázorňujme jako body této kružnice, intervalu $(\alpha, \beta) \subset \langle 0, 1 \rangle$ pak odpovídá oblouk na této kružnici.



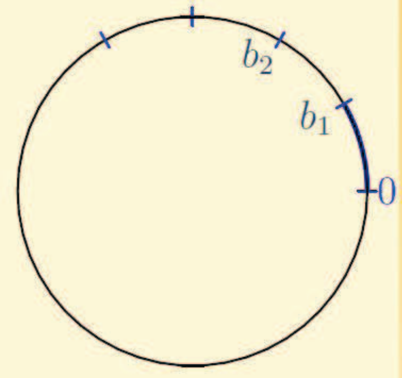
- Uvažujme zobrazení $f: \ K \rightarrow K$ definované jako otočení (v kladném směru) kolem středu K o úhel $2\pi x$ radianů a posloupnost (b_n) bodů ležících na K definovanou rekurentně:

$$b_1 = f(0),$$

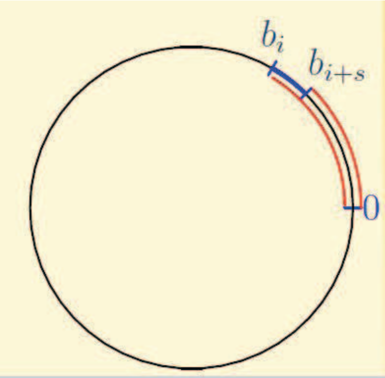
$$b_2 = f(b_1) = (f \circ f)(0),$$

$$\ldots$$

$$b_n = f(b_{n-1}) = (\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n\text{-krát}})(0).$$



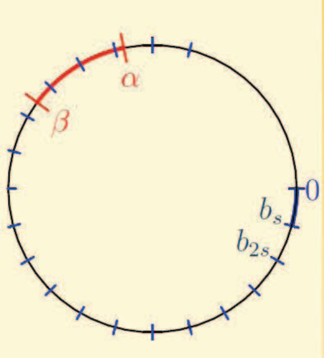
- Všimněme si, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je délka oblouku $(0, b_n)$ rovna číslu a_n, a proto délka oblouku mezi body b_i a b_{i+s} je rovna číslu $\varepsilon < \beta - \alpha$. Takže $\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{s\text{-krát}}$ je otočení o úhel $2\pi\varepsilon$ radianů.



- Z uvedených úvah již snadno plyne, že nekonečně mnoho z bodů

$$b_s,\ b_{2s},\ b_{3s},\ b_{4s},\ \dots$$

leží v oblouku (α, β) (jehož délka je větší než ε, což je délka oblouků s krajními body b_{ns}, $b_{(n+1)s}$), a proto nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) leží v intervalu (α, β).



Problém:

$\boxed{\text{Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7?}}$

Problém:

$\boxed{\text{Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7 ?}}$

Řešení: Uvědomíme-li si, že

$$2^n \text{ začíná cifrou } 7$$

Problém:

$\boxed{\text{Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7?}}$

Řešení: Uvědomíme-li si, že

$$2^n \text{ začíná cifrou } 7$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists k \in \mathbb{N}: \ 7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$$

Problém:

$\boxed{\text{Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7 ?}}$

Řešení: Uvědomíme-li si, že

$$2^n \text{ začíná cifrou } 7$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists k \in \mathbb{N}: \; 7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists k \in \mathbb{N}: \; k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$$

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7 ?

Řešení: Uvědomíme-li si, že

$$2^n \text{ začíná cifrou } 7$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists k \in \mathbb{N}: \ 7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists k \in \mathbb{N}: \ k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \log 7 < n \log 2 - [n \log 2] < \log 8 < 1$$

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7 ?

Řešení: Uvědomíme-li si, že

$$2^n \text{ začíná cifrou } 7$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists k \in \mathbb{N}: \; 7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists k \in \mathbb{N}: \; k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$$
$$\Updownarrow$$
$$0 < \log 7 < n \log 2 - [n \log 2] < \log 8 < 1$$

a že $\log 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7 ?

Řešení: Uvědomíme-li si, že

$$2^n \text{ začíná cifrou } 7$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists k \in \mathbb{N}: \;\; 7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists k \in \mathbb{N}: \;\; k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \log 7 < n \log 2 - [n \log 2] < \log 8 < 1$$

a že $\log 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, zjistíme (viz dříve uvedenou větu), že

existuje nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ takových,

že 2^n začíná cifrou 7.

Domácí úkol:

Ukažte, že pro jakoukoliv konečnou posloupnost cifer existuje nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ takových, že dekadický zápis čísla 2^n touto posloupností začíná.

… a něco numerologie:

$1931\ldots = 2^{7462}$,	$1946\ldots = 2^{10475}$,	$1961\ldots = 2^{187}$,	$1976\ldots = 2^{1064}$,	$1991\ldots = 2^{1941}$,
$1932\ldots = 2^{569}$,	$1947\ldots = 2^{1446}$,	$1962\ldots = 2^{4459}$,	$1977\ldots = 2^{5336}$,	$1992\ldots = 2^{4077}$,
$1933\ldots = 2^{6977}$,	$1948\ldots = 2^{9990}$,	$1963\ldots = 2^{1838}$,	$1978\ldots = 2^{579}$,	$1993\ldots = 2^{1456}$,
$1934\ldots = 2^{84}$,	$1949\ldots = 2^{961}$,	$1964\ldots = 2^{3974}$,	$1979\ldots = 2^{4851}$,	$1994\ldots = 2^{3592}$,
$1935\ldots = 2^{6492}$,	$1950\ldots = 2^{7369}$,	$1965\ldots = 2^{10382}$,	$1980\ldots = 2^{94}$,	$1995\ldots = 2^{971}$,
$1936\ldots = 2^{1735}$,	$1951\ldots = 2^{476}$,	$1966\ldots = 2^{1353}$,	$1981\ldots = 2^{2230}$,	$1996\ldots = 2^{3107}$,
$1937\ldots = 2^{6007}$,	$1952\ldots = 2^{6884}$,	$1967\ldots = 2^{9897}$,	$1982\ldots = 2^{10774}$,	$1997\ldots = 2^{486}$,
$1938\ldots = 2^{1250}$,	$1953\ldots = 2^{2127}$,	$1968\ldots = 2^{868}$,	$1983\ldots = 2^{1745}$,	$1998\ldots = 2^{2622}$,
$1939\ldots = 2^{5522}$,	$1954\ldots = 2^{6399}$,	$1969\ldots = 2^{7276}$,	$1984\ldots = 2^{8153}$,	$1999\ldots = 2^{9030}$,
$1940\ldots = 2^{765}$,	$1955\ldots = 2^{1642}$,	$1970\ldots = 2^{383}$,	$1985\ldots = 2^{1260}$,	$2000\ldots = 2^{2137}$,
$1941\ldots = 2^{5037}$,	$1956\ldots = 2^{5914}$,	$1971\ldots = 2^{6791}$,	$1986\ldots = 2^{7668}$,	$2001\ldots = 2^{8545}$,
$1942\ldots = 2^{280}$,	$1957\ldots = 2^{1157}$,	$1972\ldots = 2^{2034}$,	$1987\ldots = 2^{775}$,	$2002\ldots = 2^{1652}$,
$1943\ldots = 2^{4552}$,	$1958\ldots = 2^{5429}$,	$1973\ldots = 2^{6306}$,	$1988\ldots = 2^{7183}$,	$2003\ldots = 2^{5924}$,
$1944\ldots = 2^{10960}$,	$1959\ldots = 2^{672}$,	$1974\ldots = 2^{1549}$,	$1989\ldots = 2^{290}$,	$2004\ldots = 2^{1167}$,
$1945\ldots = 2^{1931}$,	$1960\ldots = 2^{4944}$,	$1975\ldots = 2^{5821}$,	$1990\ldots = 2^{6698}$,	$2005\ldots = 2^{5439}$.

Literatura a zdroje

P. Strzelecki
On powers of 2
EMS Newsletter, No. 52 (2004), 7-8

V. Jarník
Diferenciální počet II
Academia, Praha (1976), 72-74

D. Acheson
1089 a vše, co s tím souvisí. Moment prekvapení v matematice.
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, vol. 49 (2004), issue 1, pp. 24-31
(http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141206)

Literatura a zdroje

- P. Strzelecki
  On powers of 2
  EMS Newsletter, No. 52 (2004), 7-8

- V. Jarník
  Diferenciální počet II
  Academia, Praha (1976), 72-74

- D. Acheson
  1089 a vše, co s tím souvisí. Moment prekvapení v matematice.
  Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, vol. 49 (2004), issue 1, pp. 24-31 (http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141206)

- http://am.vsb.cz/osma , http://skomam.vsb.cz/

Literatura a zdroje

- P. Strzelecki
  On powers of 2
  EMS Newsletter, No. 52 (2004), 7-8
- V. Jarník
  Diferenciální počet II
  Academia, Praha (1976), 72-74
- D. Acheson
  1089 a vše, co s tím souvisí. Moment prekvapení v matematice.
  Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, vol. 49 (2004), issue 1, pp. 24-31
  (http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141206)
- http://am.vsb.cz/osma , http://skomam.vsb.cz/

Děkuji vám za pozornost!