Odmocnina z komplexního čísla

Krokovaný příklad – středně těžký

V následujícím textu budete řešit postupně příklad tak, že vždy musíte správně vyřešit určitý dílčí úkol.

Test byl vytvořen v rámci projektu Matematika s radostí dle návrhu Michala Matušky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

V oboru komplexních čísel vypočítejte $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

A

B

C

D

matematika s radostí

1 2 3 4 5 6

V oboru komplexních čísel vypočítejte $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

A

B

C

V oboru komplexních čísel vypočítejte $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

A

B

C

D

V oboru komplexních čísel vypočítejte $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

A

B

C

D

V oboru komplexních čísel vypočítejte $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

A

B

C

Výpočet je dokončen. Nyní si shrneme jednotlivé kroky. Můžete se též vrátit na předchozí stránky k postupnému výpočtu a zodpovězeným otázkám.

Tedy

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Řešení rovnice $x^4 = 1 + \mathrm{i}$ hledáme ve tvaru

$$x = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Podle Moivreovy věty je

$$x^4 = [r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)]^4 = r^4(\cos 4\varphi + \mathrm{i}\sin 4\varphi).$$

Hledáme tedy taková $x = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, pro něž platí:

$$r^4(\cos 4\varphi + \mathrm{i}\sin 4\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Dvě komplexní čísla se rovnají, rovnají-li se **jejich absolutní hodnoty a zároveň jejich argumenty**, nebo liší-li se hodnoty argumentů o celý násobek 2π. Tedy

$$r^4 = \sqrt{2}, \qquad \text{tj. } r = \sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2},$$
$$4\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ tj. } \varphi = \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

(pokračování na další straně)

Funkce sinus a kosinus mají periodu 2π, takže navzájem různých řešení je **konečně** mnoho. Úloha má tedy celkem 4 řešení:

$$x_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right), \text{ pro } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Dosazením za k pak dostaneme jednotlivá řešení

$$x_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right),$$
$$x_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9}{16}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{9}{16}\pi\right),$$
$$x_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17}{16}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{17}{16}\pi\right),$$
$$x_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25}{16}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{25}{16}\pi\right).$$